ПРЕДСТАВЛЕ́НИЕ ГРУ́ППЫ — изображение элементов группы матрицами или преобразованиями линейного пространства, при к-ром сохраняется исходная групповая структура. Поскольку достаточно хорошо изучены матричные группы, при исследовании произвольной группы стараются установить соответствие между её элементами и матрицами нек-рого фиксиров. порядка, т. е. изучать группу с помощью её линейной модели. Рассмотрение П. г. позволяет обнаружить важные свойства самих групп.

В физике естеств. образом возникают П. г. симметрии. Рассмотрим, напр., преобразования трёхмерного пространства в результате вращений системы координат. Закон преобразования векторов $x \to x'$ даёт, разумеется, трёхмерное П. г. вращений. Инвариантность скаляров относительно вращений позволяет ввести одномерное П. г. вращений, когда каждый элемент группы отображается на тождеств. преобразование. Можно записать закон преобразования компонент T_{ij} тензора ранга 2. Если рассматривать 9 величин T_{ij} как координаты точки 9-мерного пространства, получим 9-мерное П. г. вращений. Пусть $T_{ij} = T_{ji}$, это свойство инвариантно относительно вращений; поскольку при этом остаётся лишь 6 компонент T_{ij}, получается 6-мерное П. г. вращений, и т. д. Аналогично можно построить П. г. Лоренца. Законы преобразования спиноров дают т. н. двузначные П. г. вращений и группы Лоренца. Симметрия или антисимметрия многочастичной волновой ф-ции при перестановке тождеств. частиц даёт П. г. перестановок. Одна из целей теории П. г.— найти разл. законы преобразования физ. величин, т. е. найти всевозможные П. г. симметрии.

П. г. тесно связаны с разл. *специальными функциями* матем. физики, в к-рых явно проявляются соотношения симметрии. Эта связь позволяет с единой точки зрения исследовать свойства спец. ф-ций и обнаружить новые классы ф-ций.

Развитие теории П. г. началось в кон. 19 — нач. 20 вв. в работах Г. Фробениуса (G. Frobenius) и И. Шура (I. Schur). Затем Г. Вейль (H. Weyl), Дж. Нейман (J. Neumann) и Ю. Вигнер (E. Wigner) продемонстрировали важность этой теории для физики.

Основные определения. П. г. G в пространстве V наз. отображение $D(G, V)$ этой группы в набор преобразований V. Каждому элементу $g \in G$ ставится в соответствие оператор $T(g)$, действующий в пространстве V, причём $T(g_1 g_2) = T(g_1)T(g_2)$ для любых g_1 и g_2 из G; $T(e) = I$, где e — единичный элемент группы G, а I — единичный оператор в V. П. г. наз. л и н е й н ы м, если V — линейное пространство, а $T(g)$ — линейный оператор. В дальнейшем речь будет идти только о линейных П. г. Если G — топологич. группа, то обычно требуют, чтобы $T(g)$ непрерывно зависел от g, такие П. г. наз. н е п р е р ы в н ы м и.

Размерность пространства V обычно наз. р а з м е р н о с т ь ю п р е д с т а в л е н и я, $\dim D(G, V)$, П. г. наз. вещественным (комплексным), если пространство П. г. V — вещественное (комплексное). Если $D(G, V)$ конечномерно, то, выбрав в V базис $e_1, e_2, \ldots, e_n$, можно задать операторы $T(g)$ матрицами n-го порядка $\|T_{ij}(g)\|$, где элементы матрицы определяются соотношением $T(g)e_k = \sum_{j=1}^{n} T_{jk}(g)e_j$. Матрица $\|T_{ij}(g)\|$ наз. м а т р и ц е й п р е д с т а в л е н и я $D(G, V)$, а ф-ции $T_{ij}(g)$ — м а т р и ч н ы м и э л е м е н т а м и п р е д с т а в л е н и я.

Простейшее П. г. получается, если положить $T(g) \equiv I$, оно наз. е д и н и ч н ы м или тривиальным. Если группа G состоит из матриц фиксиров. порядка, то одно из П. г. получается при $T(g) = g$. Т. о., определение всякой линейной группы является одновременно заданием её представления в виде группы линейных операторов, т. е. группы матриц. Такие П. г. наз. о п р е д е л я ю щ и м и. П. г. $D(G, V)$ наз. т о ч н ы м, если $T(g) = I$, тогда и только тогда, когда $g = e$. В этом случае отображение $g \to T(g)$ взаимно однозначно (является изоморфизмом).

Если H — подгруппа группы G, то, рассматривая операторы $T(g)$ только при $g = h \in H$, получим представление $D(H, V)$, называемое с у ж е н и е м П. г. на подгруппу H. Подпространство $V_1 \subset V$ наз. инвариантным относительно П. г. $D(G, V)$, если оно инвариантно относительно всех операторов $T(g)$ этого П. г., т. е. для любых $g \in G$ и $v \in V_1$, $T(g)v \in V_1$ [операторы $T(g)$ не выводят из V_1].

Два П. г. $D_1(G, V_1)$ и $D_2(G, V_2)$ наз. э к в и в а л е н т н ы м и, $D_1(G, V_1) \sim D_2(G, V_2)$, если существует линейный оператор A, взаимно однозначно отображающий V_1 на V_2 и удовлетворяющий условию $AT_1(g) = T_2(g)A$ для всех $g \in G$. Если $D_1(G, V_1)$ конечномерно и $D_1(G, V_1) \sim D_2(G, V_2)$, то $\dim D_1(G, V_1) = \dim D_2(G, V_2)$ и при соответствующем выборе базиса в V_1 и V_2 матричные элементы представлений $D_1(G, V_1)$ и $D_2(G, V_2)$ совпадают.

Пусть $V_1 \subset V$ — инвариантное подпространство относительно П. г. $D(G, V)$. Тогда получаем П. г. $D_1(G, V_1)$, к-рое наз. п о д п р е д с т а в л е н и е м П. г. $D(G, V)$. П. г. наз. п р и в о д и м ы м, если оно содержит нетривиальные (т. е. отличные от тривиального и самого себя) подпредставления. П. г. $D(G, V)$ наз. р а з л о ж и м ы м, если содержит подпредставления $D_1(G, V_1)$ и $D_2(G, V_2)$, такие, что V изоморфно прямой сумме своих подпространств, $V = V_1 \oplus V_2$. В этом случае говорят, что П. г. эквивалентно п р я м о й с у м м е п р е д с т а в л е н и й D_1 и D_2: $D \sim D_1 \oplus D_2$. Если в П. г. D для всякого подпредставления D_1 существует подпредставление D_2, такое, что $D \sim D_1 \oplus D_2$, то П. г. наз. в п о л н е п р и в о д и м ы м. В таком П. г. всякое инвариантное относительно действия операторов подпространство имеет инвариантное дополнение. Приводимое П. г. не обязательно должно быть разложимым.

Если в качестве базиса в пространстве V вполне приводимого конечномерного П. г. взять совокупность базисных векторов пространств подпредставлений, то матрицы, соответствующие операторам этого П. г., имеют квазидиагональный вид

$$T(g) = \begin{pmatrix} T_1(g) & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & T_2(g) & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & & T_k(g) \end{pmatrix}.$$

Если П. г. $D(G, V)$ не содержит нетривиальных подпредставлений, то оно наз. н е п р и в о д и м ы м. Различают алгебраич. неприводимость, т. е. отсутствие инвариантных подпространств, и топологич. неприводимость, при к-рой пространство П. г. не должно содержать замкнутых инвариантных подпространств. Алгебраически неприводимое П. г. является топологически неприводимым; обратное, вообще говоря, неверно. Полноту системы неприводимых П. г. устанавливают при помощи х а р а к т е р о в П. г. $\chi(g)$. Для матричного П. г. $\chi(g) = \mathrm{Tr}\, T(g)$.

Пусть на пространствах V_1 и V_2 задана невырожденная билинейная форма f и пусть V_2 — пространство П. г. $D(G, V_2)$. Всякому оператору $T(g)$ этого П. г. можно сопоставить дуальный оператор $T^*(g)$, действующий на пространстве V_1 так, что $f(T^*(g)v_1, v_2) = f(v_1, T(g)v_2)$. Если вместо оператора $T^*(g)$ рассмотреть оператор $T^{\langle * \rangle}(g) = T^*(g^{-1})$, то множество операторов $T^{\langle * \rangle}$ образует П. г., называемое с о п р я ж ё н н ы м к $D(G, V_2)$ относительно формы f. Поскольку f невырождена, размерности П. г. $D(G, V_2)$ и $D^{\langle * \rangle}(G, V_1)$ совпадают. Для конечномерных П. г. матрицы операторов $T^{\langle * \rangle}(g)$ имеют вид $T^{\langle * \rangle}(g) = (\hat{f}^{-1})' \cdot T'(g^{-1})\hat{f}'$, где $\hat{f}$ — матрица формы f, а штрих означает транспонирование. Если рассмотреть П. г. $D(G, \mathscr{H})$ в *гильбертовом пространстве* $\mathscr{H}$ и взять в качестве формы f скалярное произ-